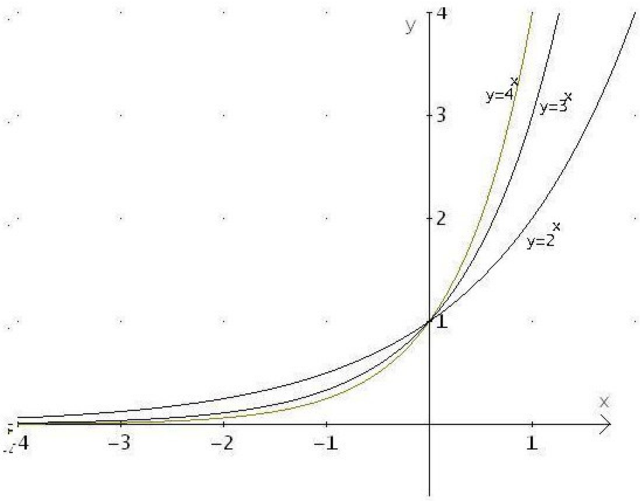
FUNZIONE ESPONENZIALE E FUNZIONE LOGARITMICA

DEFINIZIONE: Dato un numero reale a che sia $a > 0$ e $a \neq 1$ si definisce **funzione esponenziale** $f(x) = a^x$ la relazione che ad ogni valore di x associa uno e un solo $y \in \mathbb{R}$ dato da $y = a^x$.
Quindi, per esempio, $f(x) = 2^x$ è la relazione che associa ad $x = 0$ il valore $y = a^0 = 1$, ad $x = 1$ il valore $y = a^1 = 2$, ad $x = 2$ il valore $y = a^2 = 4$, ad $x = 3$ il valore $y = a^3 = 8$, ad $x = \frac{1}{2}$ il valore $y = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, ad $x = -1$ il valore $y = a^{-1} = \frac{1}{2}$ ...
Data la definizione si può osservare che

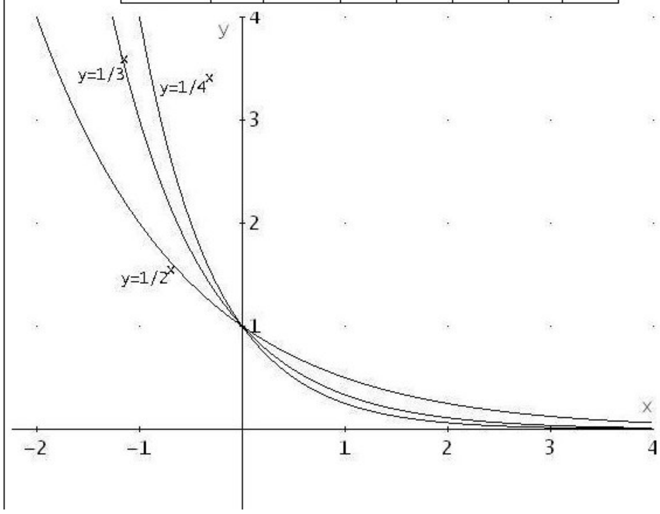
1. $\forall a \mathbb{R} a > 0 \;\; a \neq 1$ il valore di $y = a^x$ è **sempre strettamente maggiore di zero** perché se anche diamo alla x valori negativi molto grandi [come -1000] avremo
$y = a^{-1000} = \frac{1}{a^{1000}} > 0$
2. $\forall a \mathbb{R} a > 1$ la funzione $f(x) = a^x$ è "crescente", ossia se aumenta il valore dell'esponente, aumenta anche il valore della potenza: $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad a^{x_2} > a^{x_1}$
3. $\forall a \mathbb{R} 0 < a < 1$ la funzione $f(x) = a^x$ è "decrescente", ossia se aumenta il valore dell'esponente, diminuisce il valore della potenza: $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad a^{x_2} < a^{x_1}$
$$\left[\text{per esempio} \quad a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{se } 2 > 1 \text{ allora } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}\right]$$

queste ultime due osservazioni sono fondamentali nella soluzione delle disequazioni esponenziali e logaritmiche
Facciamo le opportune "tabelline" per tracciare i grafici degli esponenziali "crescenti" e di quelli "decrescenti":

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
$y = 2^x$	1	2	4	8	$1/2$	$1/4$	$1/8$
$y = 3^x$	1	3	9	27	$1/3$	$1/9$	$1/27$
$y = 4^x$	1	4	16	64	$1/4$	$1/16$	$1/64$



x	0	1	2	3	-1	-2	-3
$y = (1/2)^x$	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	2	4	8
$y = (1/3)^x$	1	$1/3$	$1/9$	$1/27$	3	9	27
$y = (1/4)^x$	1	$1/4$	$1/16$	$1/64$	4	16	64



Per affrontare qualsiasi esercizio sugli esponenziali **E' FONDAMENTALE RICORDARE, oltre alle PROPRIETA' DELLE POTENZE, che** $\boxed{a^0 = 1}$ **e che, se** $h > 0$, $\boxed{a^{-h} = \frac{1}{a^h}}$

1) $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ 2) $a^n \div a^k = a^{n-k}$ 3) $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ 5) $a^n \div b^n = (a \div b)^n$

DEFINIZIONE: Dato un numero reale a, che sia $a > 0$ e $a \neq 1$, si definisce **logaritmo in base a di x** la relazione $f(x) = \log_a x$ che ad ogni valore di $x > 0$ associa uno e un solo numero reale $y = \log_a x$ che rappresenta l'esponente da dare ad a per ottenere x, cioè $y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$

PROPRIETA':

1. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a(b \div c) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a(b)^c = c \cdot \log_a b$
4. **Teorema del cambiamento di base**: $\forall k > 0 e k \neq 1 \log_a b = \dfrac{\log_k b}{\log_k a}$

dimostrazioni: tutte le dimostrazioni si basano sul "chiamare con una lettera diversa" ciascuno dei logaritmi e applicare la definizione di logaritmo e l'opportuna proprietà delle potenze

1. chiamiamo $\log_a(b \cdot c) = x \quad \log_a b = y$ e $\log_a c = z$
   avremo che $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad x = y + z$
   Per definizione sappiamo:
   $\log_a(b \cdot c) = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \cdot c$
   $\log_a b = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = b$
   $\log_a c = z \quad \Leftrightarrow \quad a^z = c$
   adesso facciamo le sostituzioni di b e di c nella prima definizione x e otteniamo:
   $a^x = b \cdot c \quad \Leftrightarrow \quad a^x = a^y \cdot a^z$
   per la prima proprietà delle potenze avremo
   $a^x = a^{y+z} \qquad \Rightarrow \qquad x = y + z$ come si voleva dimostrare
2. chiamiamo come sopra $\log_a(b \cdot c) = x \quad \log_a b = y$ e $\log_a c = z$
   avremo che $\log_a(b \div c) = \log_a b - \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad x = y - z$
   Per definizione sappiamo:
   $\log_a(b \div c) = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \div c$
   $\log_a b = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = b$
   $\log_a c = z \quad \Leftrightarrow \quad a^z = c$
   adesso facciamo le sostituzioni di b e di c nella prima definizione x e otteniamo:
   $a^x = b \div c \quad \Leftrightarrow \quad a^x = a^y \div a^z$
   per la seconda proprietà delle potenze avremo
   $a^x = a^{y-z} \qquad \Rightarrow \qquad x = y - z$ come si voleva dimostrare
3. chiamiamo $\log_a(b)^c = x$ e $\log_a b = y$
   avremo che $\log_a(b)^c = c \cdot \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad x = c \cdot y$
   Per definizione sappiamo:
   $\log_a(b)^c = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = (b)^c$
   $\log_a b = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = b$
   adesso facciamo la sostituzione di b nella prima definizione x e otteniamo:
   $a^x = (b)^c \quad \Leftrightarrow \quad a^x = (a^y)^c$
   per la terza proprietà delle potenze avremo
   $a^x = a^{c \cdot y} \qquad \Rightarrow \qquad x = c \cdot y$ come si voleva dimostrare
4. chiamiamo $\log_a b = x \quad \log_k b = y$ e $\log_k a = z$
   avremo che $\log_a b = \dfrac{\log_k b}{\log_k a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y}{z}$ ovvero $z \cdot x = y$

Per definizione sappiamo:
$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$
$\log_k b = y \quad \Leftrightarrow \quad k^y = b$
$\log_k a = z \quad \Leftrightarrow \quad k^z = a$
adesso confrontiamo le prime due definizioni e otteniamo che:
$a^x = b$ e $k^y = b \quad \Rightarrow \quad a^x = k^y$
sostituiamo la a della terza definizione e abbiamo
$(k^z)^x = k^y \quad \Rightarrow \quad k^{z \cdot x} = k^y \quad \Rightarrow \quad z \cdot x = y$ come si voleva dimostrare

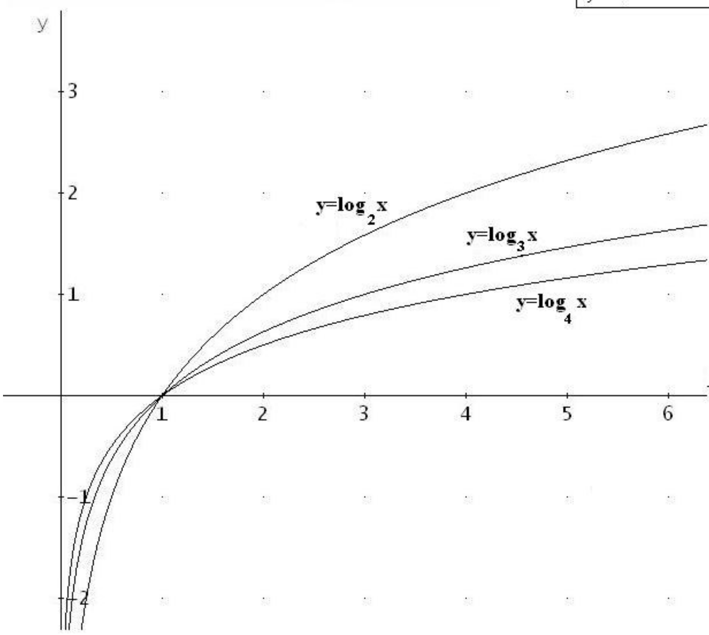
I primi tre teoremi sui logaritmi sono fondamentali per risolvere qualsiasi problema sui logaritmi, il quarto teorema del cambiamento di base è fondamentale per calcolare logaritmi che siano in base diversa da 10 e da e
Dalla definizione e indispensabile notare che

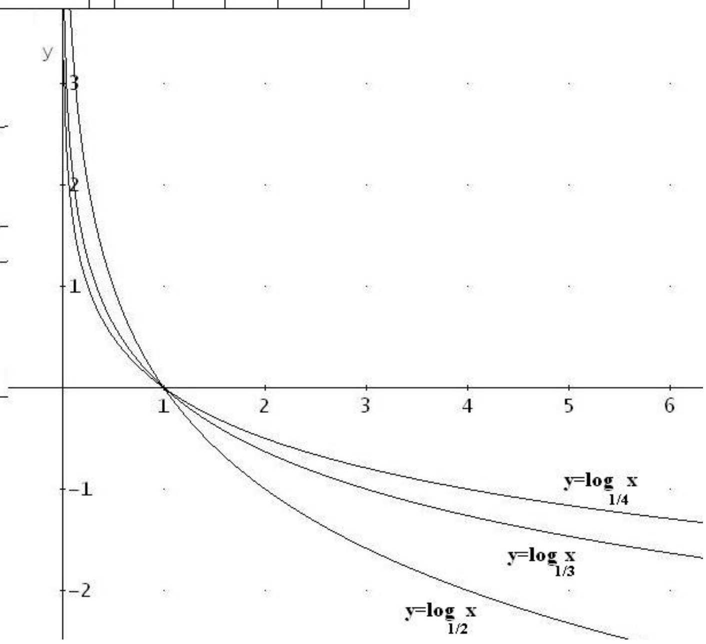
1. prima di risolvere qualsiasi equazione o disequazione logaritmica **bisogna considerare le Condizioni di Esistenza**, ponendo **ogni argomento dei logaritmi maggiore di zero**.
   NB: se ci sono più logaritmi (i cui argomenti devono essere strettamente positivi) la ricerca delle C.E. diventa la soluzione di un sistema di disequazioni!

2. se la base del logaritmo è $a > 1$ il logaritmo è una funzione crescente, cioé se $x_2 > x_1$ anche l'esponente y_2 da dare ad a per raggiungere il valore x_2 sarà maggiore dell'esponente y_1 da dare ad a per raggiungere il valore x_1 NB: di solito si calcolano i logaritmi in base 10 e in base $e = 2,718282\ldots$: poiché entrambe le basi sono maggiori di 1 si è soliti considerare sempre crescente la funzione logaritmica

x	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y = \log_2 x \Leftrightarrow 2^y = x$	0	1	2	3	-1	-2	-3
x	1	3	9	27	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$y = \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = x$	0	1	2	3	-1	-2	-3
x	1	4	16	64	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
$y = \log_4 x \Leftrightarrow 4^y = x$	0	1	2	3	-1	-2	-3

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	2	4	8
$y = \log_{1/2} x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = x$	0	1	2	3	-1	-2	-3
x	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	3	9	27
$y = 3^x$	0	1	2	3	-1	-2	-3
x	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	4	16	64
$y = 4^x$	0	1	2	3	-1	-2	-3





TIPOLOGIE DI ESERCIZI

Equazioni esponenziali:

- portare tutto nella stessa base e confrontare gli esponenti

 1) $4^x = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (2^2)^x = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} = 2^{1+\frac{1}{2}}$ [terza e prima proprietà delle potenze; esponenziali, con la stessa base, uguali hanno uguali esponenti] $\Rightarrow$
 $2x = 1 + \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$

 2) $3^{3(x+1)} = 9^{\frac{1}{x}+1}$ [C.E.: $x \neq 0$ perché è al denominatore nell'esponente del 9]
 $3^{3x+3} = (3^2)^{\frac{1+x}{x}} \quad \Rightarrow \quad 3^{3x+3} = 3^{\frac{2+2x}{x}} \quad \Rightarrow$ [stessa base, confronto esponenti]
 $3x + 3 = \dfrac{2+2x}{x} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 3x = 2 + 2x \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow$
 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = 2 \quad \bigvee \quad -3$

 3) $2^{x+2} - 2^{x-1} - 2^{x-2} = 26 \quad \Rightarrow \quad 2^x \cdot 2^2 - \dfrac{2^x}{2^1} - \dfrac{2^x}{2^2} = 26 \quad \Rightarrow \quad 2^{x\left(4-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)} = 26$
 $\Rightarrow \quad 2^x \cdot \dfrac{16-2-1}{4} = 26 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 26 \cdot \dfrac{4}{13} = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

- utilizzare il terzo teorema sui logaritmi per "tirare giù" gli esponenti

 1) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29 \quad \Rightarrow \quad 3^x \cdot 3 + 2 \cdot \dfrac{3^2}{3^x} = 29 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3(3^x)^2 + 18 - 29 \cdot 3^x}{3^x} = 0$
 una frazione è uguale a zero se e solo se è zero il suo numeratore, quindi
 $3(3^x)^2 - 29 \cdot 3^x + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{29 \pm \sqrt{29^2 - 12 \cdot 18}}{6} = \dfrac{29 \pm \sqrt{625}}{6} = \dfrac{2}{3} \quad \bigvee \quad 9$
 $3^x = 9 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad 3^x = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \log_3 3 = \log_3 \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow$
 $x \cdot 1 = \log_3 2 - \log_3 3 \quad \Rightarrow \quad x = \log_3 2 - 1 \simeq -0,369$
 N.B. allo stesso identico risultato si poteva giungere applicando il logaritmo in base 10 anziché il $\log_3$:
 $3^x = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \log 3 = \log \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 2 - \log 3}{\log 3} \simeq -0,369$

 2) $9^x - 3^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3^2)^x - (3^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3^x)^2 - (3^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow$
 $3^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2 \quad \bigvee \quad -\dfrac{3}{2}$ da ciò si ricava
 $3^x = -\dfrac{3}{2}$ che è **impossibile** perché un esponenziale è sempre positivo
 $3^x = 2 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \log 3 = \log 2 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\log 2}{\log 3}$

 3) $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 2^{3x+1} - 2^{3x} \quad \Rightarrow$
 $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3 \cdot 3^x = 2^{3x} \cdot 2^1 - 2^{3x} \quad \Rightarrow \quad 3^x(2+15) = 2^{3x}(2-1) \quad \Rightarrow \quad 17 \cdot 3^x = 2^{3x}$
 applichiamo il teorema sul lgaritmo di un prodotto nel termine di sinistra e poi il teorema del logaritmo di una potenza in entrambi i termini:
 $\log(17 \cdot 3^x) = \log(2^{3x}) \quad \Rightarrow \quad \log 17 + \log 3^x = 3x \cdot \log 2 \quad \Rightarrow \quad \log 17 + x \cdot \log 3 = 3x \cdot \log 2 \quad \Rightarrow$
 è diventata una equazione di primo grado in x! Quindi si risolve **normalmente** portando tutte le x da una parte ecc...
 $\log 17 = 3x \cdot \log 2 - x \cdot \log 3 \quad \Rightarrow \quad \log 17 = x(3 \cdot \log 2 - \log 3) \quad \Rightarrow$
 $\dfrac{\log 17}{3 \cdot \log 2 - \log 3} = x \quad \Rightarrow \quad x \simeq 2,889$

- quando l'esponenziale è al denominatore di solito si può individuare un'equazione di secondo grado in un'opportuna incognita

1) $5^x + 5^{-x-1} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad 5^x + \frac{1}{5^{x+1}} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{5^x \cdot 5^{x+1} + 1}{5^{x+1}} - \frac{6}{5} = 0 \quad \Rightarrow$
$\frac{5 \cdot 5^x \cdot 5^{x+1} + 5 - 6 \cdot 5^{x+1}}{5 \cdot 5^{x+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5^{x+1} \cdot 5^{x+1} + 5 - 6 \cdot 5^{x+1}}{5 \cdot 5^{x+1}} = 0 \quad \Rightarrow$
$\frac{(5^{x+1})^2 - 6 \cdot 5^{x+1} + 5}{5 \cdot 5^{x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow$ il numeratore è uguale a zero; se poniamo $y = 5^{x+1}$ il numeratore diventa $y^2 - 6y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{1} = 5 \quad \bigvee \quad 1$ allora
$y = 5^{x+1} = 5 \quad \Rightarrow$
$x + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ e $y = 5^{x+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

2) $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x} \quad \Rightarrow \quad 5^x \cdot 5^2 - 4 \cdot \frac{5}{5^x} - 30 + \frac{5^2}{5^x} = 0 \quad \Rightarrow$
$\frac{25 \cdot (5^x)^2 - 20 - 30 \cdot 5^x + 25}{5^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{25 \cdot (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 5}{5^x} = 0$
una frazione è uguale a zero $\Leftrightarrow$ è uguale a zero il numeratore, quindi
$25 \cdot (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5^x = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{1} = 5 \quad \bigvee \quad 1$
da cui si ricava che $\quad 5^x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad$ e $\quad 5^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

3) $\frac{4}{2^x - 1} + \frac{3}{2^x + 1} = 5$
C.E. denominatori diversi da zero $\begin{cases} 2^x - 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; 2^x \neq 1 \;\Rightarrow\; 2^x \neq 2^0 \;\Rightarrow\; x \neq 0 \\ 2^x + 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; 2^x \neq -1 \;\textbf{sempre vero} \end{cases}$
C.E. è allora $\quad x \neq 0$

$\frac{4(2^x+1) + 3(2^x-1)}{(2^x-1)(2^x+1)} = \frac{5(2^x-1)(2^x+1)}{(2^x-1)(2^x+1)} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 2^x + 4 + 3 \cdot 2^x - 3 = 5[(2^x)^2 - 1] \quad \Rightarrow$

$7 \cdot 2^x + 1 = 5(2^x)^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad 5(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 6 = 0$

possiamo risolverla come un'equazione di secondo grado in 2^x

$2^x = \frac{7 \pm \sqrt{49+120}}{10} = \frac{7 \pm 13}{10} = 2 \quad \bigvee \quad -\frac{3}{5}$

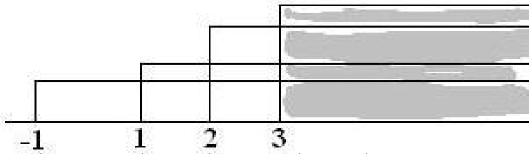
allora $\quad 2^x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad$ mentre $\quad 2^x = -\frac{3}{2} \quad$ è impossibile perché un esponenziale è sempre positivo.

Equazioni logaritmiche: **E' fondamentale ricordare che il logaritmo di un numero (che sia > 0!) è un numero! E questo numero (risultato del logaritmo) può essere positivo, negativo o uguale a zero** Guardare i grafici di $y = logx$: è la x ad essere necessariamente maggiore di zero, mentre la y (ossia il grafico) si trova sia sul semipiano superiore ($y > 0$) che sul semipiano inferiore ($y < 0$)che sull'asse delle x ($y = 0$). Inoltre **non si può dimenticare di studiare le C.E.!**

- applicare la definizione di logaritmo e i teoremi sui logaritmi

1) $\log(x-1) - \log(x+1) = \log(x-3) - \log(x-2) \qquad$ C.E. $\begin{cases} x - 1 > 0 & \Rightarrow & x > 1 \\ x + 1 > 0 & \Rightarrow & x > -1 \\ x - 3 > 0 & \Rightarrow & x > 3 \\ x - 2 > 0 & \Rightarrow & x > 2 \end{cases}$

C.E. $x > 3$



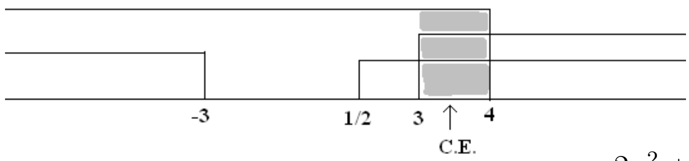
$\log(x-1)-\log(x+1) = \log(x-3)-\log(x-2) \quad \Rightarrow \quad \log\dfrac{x-1}{x+1} = \log\dfrac{x-3}{x-2} \quad \Rightarrow$
$\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x-3}{x-2}$
perché due logaritmi con la stessa base sono uguali solo se hanno lo stesso argomento!
$\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x-3}{x-2} \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-2) = (x+1)(x-3) \quad \Rightarrow$
$x^2-2x-x+2 = x^2-3x+x-3 \quad \Rightarrow \quad +3x-x-2x-x = -3-2 \quad \Rightarrow \quad x = 5$
accettabile perché $5 > 3$

2) $2\cdot\log_3(x-2) = 2$ C.E. $x-2>0 \quad \Rightarrow \quad x>2$
$2\cdot\log_3(x-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad \log_3(x-2)^2 = 2$ per definizione $(x-2)^2 = 3^2$
$x^2-4x+4-9=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pm\sqrt{4+5} \quad \Rightarrow \quad x =$
$5 \quad \bigvee \quad x=-1$ quest'ultima non accettabile perché non soddisfa le C.E.

3) $\log(2x^2+5x-3)-\log(x-3) = \log(4-x)$

$$\text{C.E.} \begin{cases} 2x^2+5x-3>0 & \text{fuori dall'intervallo delle soluzioni} \\ x-3>0 \quad \Rightarrow \quad x>3 \\ 4-x>0 \quad \Rightarrow \quad 4>x \quad \text{cioè} \quad x<4 \end{cases}$$

le soluzioni della prima disequazione del sistema sono $x = \dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{1}{2} \quad \bigvee \quad -3$



$\log(2x^2+5x-3)-\log(x-3) = \log(4-x) \quad \Rightarrow \quad \log\dfrac{2x^2+5x-3}{x-3} = \log(4-x) \quad \Rightarrow$
$\dfrac{2x^2+5x-3}{x-3} = 4-x \quad \Rightarrow \quad 2x^2+5x-3 = 4x-x^2-12+3x \quad \Rightarrow$
$3x^2-2x+9=0$ questa equazione **non ha soluzioni reali** perché $\Delta = 1-9\cdot 3 < 0$

- se necessario individuare un'equazione di secondo grado rispetto ad una incognita opportuna

1) $\dfrac{3}{\log_2 x - 1} + \dfrac{2}{\log_2 x + 1} = 2$

$$\text{C.E.} \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2 \\ \log_2 x + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

C.E. $x>0 \quad x\neq 2 \quad x \neq \dfrac{1}{2}$

$$\frac{3}{\log_2 x - 1} + \frac{2}{\log_2 x + 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3(\log_2 x+1)+2(\log_2 x-1)}{(\log_2 x-1)(\log_2 x+1)} = \frac{2(\log_2 x-1)(\log_2 x+1)}{(\log_2 x-1)(\log_2 x+1)}$$

$3\cdot\log_2 x + 3 + 2\cdot\log_2 x - 2 = 2\left[(\log_2 x)^2-1\right] \quad \Rightarrow \quad 5\cdot\log_2 x + 1 = 2\cdot(\log_2 x)^2 - 2$

possiamo vedere quest'ultima equazione come una equazione di secondo grado nell'incognita $y = \log_2 x$

$2y^2-5y-3=0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{5\pm\sqrt{25+24}}{4} = 3 \quad \bigvee \quad -\dfrac{1}{2}$
da $y=\log_2 x$ si ottiene $3 = \log_2 x \quad \Rightarrow \quad 2^3 = x \quad \Rightarrow \quad x = 8$
$-\dfrac{1}{2} = \log_2 x \quad \Rightarrow \quad x = 2^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\dfrac{1}{\log x} - 3 \cdot \log x = 2 \qquad \text{C.E.} \qquad x > 0$

$$\frac{1 - 3(\log x)^2}{\log x} = \frac{2 \cdot \log x}{\log x} \quad \Rightarrow \quad 0 = 3(\log x)^2 + 2 \cdot \log x - 1$$

si prende l'incognita $y = \log x$ e si considera l'equazione di secondo grado

$$3y^2 + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = -1 \quad \bigvee \quad \frac{1}{3}$$

$$\log x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \qquad \log x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$$

3) $\log_4 \sqrt{3x-2} - [\log_4(3x-2)]^2 = -\dfrac{1}{2} \qquad \text{C.E.} \qquad 3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{2}{3}$

$$\log_4 \sqrt{3x-2} - [\log_4(3x-2)]^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \log_4(3x-2) - [\log_4(3x-2)]^2 = -\frac{1}{2}$$

poniamo $y = \log_4(3x-2)$ e risolviamo l'equazione in y:

$$y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1 \quad \bigvee \quad -\frac{1}{2}$$

$$\log_4(3x-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4^1 = 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$\log_4(3x-2) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4^{-\frac{1}{2}} = 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{4}} + 2 = 3x \quad \Rightarrow$$

$$3x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}$$

entrambe le soluzioni sono accettabili perché maggiori di $\dfrac{2}{3}$